Problem for the week of August 3, 2009

Let

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) If $A^k = c_k A + d_k I$, for $k \geq 0$, find c_k and d_k as functions of k.

(b) Express A^{-1} as a linear combination of I and A.

Solution

(a) Cayley-Hamilton 定理的一個重要應用是將 $n \times n$ 階冪矩陣 A^k, $k \geq n$, 以 $I, A, A^2, \ldots, A^{n-1}$ 的線性組合表示。矩陣 A 的特徵多項式是 $p(t) = t^2 - 3t + 2$, 根據 Cayley-Hamilton 定理, $A^2 - 3A + 2I = 0$, 則

$$\begin{aligned} A^2 &= 3A - 2I \\ A^3 &= A(A^2) = 3A^2 - 2A = 3(3A - 2I) - 2A = 7A - 6I \\ A^4 &= A(A^3) = 7A^2 - 6A = 7(3A - 2I) - 6A = 15A - 14I \end{aligned}$$

已知 $A^k = c_k A + d_k I$, 那麼 $A^{k+1} = c_k A^2 + d_k A = c_k(3A - 2I) + d_k A = (3c_k + d_k)A - 2c_k I$, 於是有遞迴關係

$$\begin{aligned} c_{k+1} &= 3c_k + d_k \\ d_{k+1} &= -2c_k \end{aligned}$$

初始值爲 $c_0 = 0$, $d_0 = 1$。將上面二式寫爲矩陣形式的差分方程式:

$$\begin{bmatrix} c_{k+1} \\ d_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_k \\ d_k \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} c_k \\ d_k \end{bmatrix}$$

矩陣 A 可對角化爲

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = S\Lambda S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

解出

$$\begin{bmatrix} c_k \\ d_k \end{bmatrix} = A^k \begin{bmatrix} c_0 \\ d_0 \end{bmatrix} = S\Lambda^k S^{-1} \begin{bmatrix} c_0 \\ d_0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 2^k - 1 \\ -2^k + 2 \end{bmatrix}$$

(b) 仍然利用 $A^2 - 3A + 2I = 0$, 移項後 $2I = -A^2 + 3A = A(-A + 3I)$, 或

$$I = A\left[\frac{1}{2}(-A + 3I)\right]$$

這表明了 $A^{-1} = -\frac{1}{2}A + \frac{3}{2}I$。

另一個做法是利用題 (a) 導出的公式, 此公式不僅對 $k \geq 0$ 成立, 對 $k = -1$ 也成立, 故令 $k = -1$, 就有 $A^{-1} = c_{-1}A + d_{-1}I = (2^{-1} - 1)A + (-2^{-1} + 2)I = -\frac{1}{2}A + \frac{3}{2}I$。 □