1.

(1) A 矩陣的第二列調到第一列

第三列＊$\frac{1}{2}$調到第二列

第四列＊$\frac{1}{3}$調到第三列

第五列＊$\frac{1}{4}$調到第四列

第一列＊$\frac{1}{5}$調到第五列

故 $A^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 \\ 1/5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(2)先將矩陣 B 分割形成 B=$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 9 \end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right]$

可知 A 矩陣第二列＊7－第三列形成單位矩陣故 $A^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 1 \end{bmatrix}$

D 矩陣可由２＊２矩陣公式觀察出 $D^{-1}=\begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$

故 $B^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 1 \end{bmatrix}$

2.

(1)使用 Gauss-Jordan method

$$\left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

另解

使用分割法

$$\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & D \end{array}\right] * \left[\begin{array}{c|c} X & Y \\ \hline Z & W \end{array}\right] = I$$

可得

$X = A^{-1}$

$Y = -A^{-1}BD^{-1}$

$Z = 0$

$W = D^{-1}$

故 $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(2) 使用 Gauss-Jordan method

$$\left[\begin{array}{ccccc|ccccc}1&2&3&4&5&1&0&0&0&0\\0&1&2&3&4&0&1&0&0&0\\0&0&1&2&3&0&0&1&0&0\\0&0&0&1&2&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1&0&0&0&0&1\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{ccccc|ccccc}1&2&3&4&0&1&0&0&0&-5\\0&1&2&3&0&0&1&0&0&-4\\0&0&1&2&0&0&0&1&0&-3\\0&0&0&1&0&0&0&0&1&-2\\0&0&0&0&1&0&0&0&0&1\end{array}\right]$$

$$\rightarrow\left[\begin{array}{ccccc|ccccc}1&2&3&0&0&1&0&0&-4&3\\0&1&2&0&0&0&1&0&-3&2\\0&0&1&0&0&0&0&1&-2&1\\0&0&0&1&0&0&0&0&1&-2\\0&0&0&0&1&0&0&0&0&1\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{ccccc|ccccc}1&2&0&0&0&1&0&-3&2&0\\0&1&0&0&0&0&1&-2&1&0\\0&0&1&0&0&0&0&1&-2&1\\0&0&0&1&0&0&0&0&1&-2\\0&0&0&0&1&0&0&0&0&1\end{array}\right]$$

$$\rightarrow\left[\begin{array}{ccccc|ccccc}1&0&0&0&0&1&-2&1&0&0\\0&1&0&0&0&0&1&-2&1&0\\0&0&1&0&0&0&0&1&-2&1\\0&0&0&1&0&0&0&0&1&-2\\0&0&0&0&1&0&0&0&0&1\end{array}\right]$$

故 $B^{-1}=\begin{bmatrix}1&-2&1&0&0\\0&1&-2&1&0\\0&0&1&-2&1\\0&0&0&1&-2\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}$

另解

使用分割法

$$\left[\begin{array}{c|c}A&B\\\hline 0&D\end{array}\right]*\left[\begin{array}{c|c}X&Y\\\hline Z&W\end{array}\right]=I$$

可得

$X=A^{-1}$

$Y=-A^{-1}BD^{-1}$

$Z=0$

$W=D^{-1}$

故 $B^{-1}=\begin{bmatrix}1&-2&1&0&0\\0&1&-2&1&0\\0&0&1&-2&1\\0&0&0&1&-2\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}$

3.

$$\begin{bmatrix}1&2&0\\0&2&1\\1&1&3\end{bmatrix}X=\begin{bmatrix}5&2&7\\3&5&9\\0&10&13\end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&5&2&7\\0&2&1&3&5&9\\1&1&3&0&10&13\end{array}\right]\Rightarrow E_{31}^{(-1)}\Rightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&5&2&7\\0&2&1&3&5&9\\0&-1&3&-5&8&6\end{array}\right]\Rightarrow E_{2}^{(1/2)}\Rightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&5&2&7\\0&1&1/2&3/2&5/2&9/2\\0&-1&3&-5&8&6\end{array}\right]$$

$$\Rightarrow E_{32}^{(1)}\Rightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&1&0&1\\0&1&1/2&2&1&3\\0&0&1&-1&3&3\end{array}\right]\Rightarrow E_{23}^{(-1/2)}\Rightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&5&2&7\\0&1&0&2&1&3\\0&0&1&-1&3&3\end{array}\right]\Rightarrow E_{12}^{(-2)}\Rightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&1\\0&1&0&2&1&3\\0&0&1&-1&3&3\end{array}\right]$$

$$X=\begin{bmatrix}1&0&1\\2&1&3\\-1&3&3\end{bmatrix}$$

４.

$B = (A^2)^{-1} = A^{-1}A^{-1}$,等式兩邊同乘 A(左乘)

$AB = A^{-1}$, 得証 AB is the inverse of A.

$B = (A^2)^{-1} = A^{-1}A^{-1}$, 等式兩邊同乘 A(右乘)

$BA=A^{-1}$,得証 AB=BA

5.

(a) $A^3+2A^2+3A+I=0$

$I = -(A^3+2A^2+3A) =- A(A^2+2A+3I)$

$A^{-1} = -(A^2+2A+3I)$

(b)

$A^3+2A^2+3A+I=0$

$A^3+2A^2+3A+I+I=I$

$(A+I)(A^2+A+2I)=I$

$(A+I)^{-1}=A^2+A+2I$

6.

(a)

$(A^{-1}+I)^{-1}=(A^{-1}+AA^{-1})^{-1}$

$=((I+A)A^{-1})^{-1}$

$=A(A+I)^{-1}$

$(A^{-1}+I)^{-1}=(A^{-1}+A^{-1}A)^{-1}$

$=(A^{-1}(I+A))^{-1}$

$=(A+I)^{-1}A$

(b)

$B(A+B)^{-1}A=(A^{-1}(A+B)B^{-1})^{-1}$

$=((I+A^{-1}B)B^{-1})^{-1}$

$=(B^{-1}+A^{-1})^{-1}$

$=(A^{-1}+B^{-1})^{-1}$